



导学案

主编 肖德好

全品

学练考

高中数学

必修第二册 SJ

细分课时

分层设计

落实基础

突出重点

天津出版传媒集团
天津人民出版社

目录 Contents

09 第9章 平面向量

PART NINE

9.1 向量概念		导 203
9.2 向量运算		导 205
9.2.1 向量的加减法		导 205
第1课时 向量的加法运算/导 205	第2课时 向量的减法运算/导 207	
9.2.2 向量的数乘		导 209
9.2.3 向量的数量积		导 211
第1课时 向量数量积的定义、投影向量/导 211	第2课时 向量数量积的运算律/导 213	
9.3 向量基本定理及坐标表示		导 215
9.3.1 平面向量基本定理		导 215
9.3.2 向量坐标表示与运算		导 217
第1课时 向量的坐标表示与向量线性运算的坐标表示/导 217	第2课时 向量数量积的坐标表示/导 219	
9.3.3 向量平行的坐标表示		导 221
9.4 向量应用		导 223
① 本章总结提升		导 225

10 第10章 三角恒等变换

PART TEN

10.1 两角和与差的三角函数		导 227
10.1.1 两角和与差的余弦		导 227
10.1.2 两角和与差的正弦		导 229
10.1.3 两角和与差的正切		导 231
10.2 二倍角的三角函数		导 233
10.3 几个三角恒等式		导 236
① 本章总结提升		导 238

11 第11章 解三角形

PART ELEVEN

11.1 余弦定理		导 241
第1课时 余弦定理/导 241	第2课时 余弦定理的应用/导 243	
11.2 正弦定理		导 245
第1课时 正弦定理/导 245	第2课时 正、余弦定理的综合问题/导 247	
微突破(一) 三角形中的最值、范围问题		导 250
11.3 余弦定理、正弦定理的应用		导 251
① 本章总结提升		导 254

12 第12章 复数

PART TWELVE

12.1 复数的概念		导 258
12.2 复数的运算		导 260
第1课时 复数的加法、减法运算、乘法运算/导 260	第2课时 复数的乘方与除法运算/导 262	
12.3 复数的几何意义		导 263
12.4 复数的三角形式*		导 266
① 本章总结提升		导 269

13 第13章 立体几何初步

PART THIRTEEN

13.1 基本立体图形	导 271
13.1.1 棱柱、棱锥和棱台	导 271
13.1.2 圆柱、圆锥、圆台和球	导 274
13.1.3 直观图的斜二测画法	导 276
13.2 基本图形位置关系	导 278
13.2.1 平面的基本性质	导 278
13.2.2 空间两条直线的位置关系	导 281
第 1 课时 平行直线/导 281	第 2 课时 异面直线/导 283
13.2.3 直线与平面的位置关系	导 284
第 1 课时 直线与平面平行/导 284	第 2 课时 直线与平面垂直/导 287
第 3 课时 线面角、线面垂直的综合应用/导 290	
13.2.4 平面与平面的位置关系	导 292
第 1 课时 两平面平行/导 292	第 2 课时 二面角、两平面垂直的判定定理/导 296
第 3 课时 平面与平面垂直的性质定理以及综合应用/导 298	
13.3 空间图形的表面积和体积	导 300
13.3.1 空间图形的表面积	导 300
13.3.2 空间图形的体积	导 302
微突破(二) 与球有关的内切、外接问题	导 304
④ 本章总结提升	导 305

14 第14章 统计

PART FOURTEEN

14.1 获取数据的基本途径及相关概念	导 309
14.2 抽样	导 311
14.2.1 简单随机抽样	导 311
14.2.2 分层抽样	导 314
14.3 统计图表	导 316
14.3.1 扇形统计图、折线统计图、频数直方图	导 316
14.3.2 频率分布直方图	导 316
14.4 用样本估计总体	导 320
14.4.1 用样本估计总体的集中趋势参数	导 320
14.4.2 用样本估计总体的离散程度参数	导 323
14.4.3 用频率分布直方图估计总体分布	导 326
14.4.4 百分位数	导 328
④ 本章总结提升	导 330

15 第15章 概率

PART FIFTEEN

15.1 样本空间和随机事件	导 335
15.2 随机事件的概率	导 338
第 1 课时 古典概型/导 338	第 2 课时 频率与概率 /导 340
微突破(三) 古典概型的应用	导 342
15.3 互斥事件和独立事件	导 344
第 1 课时 互斥事件和对立事件/导 344	第 2 课时 独立事件/导 346
④ 本章总结提升	导 349

◆ 参考答案

导 353

9.1 向量概念

【学习目标】

- 通过对力、速度、位移等的分析,了解平面向量的实际背景,理解平面向量、零向量、向量的模、单位向量、平行向量(共线向量)的意义和两个向量相等的含义.
- 能够在熟悉的实际问题情境中,理解平面向量的几何表示和基本要素.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 向量的概念

- 既有 _____, 又有 _____ 的量叫作向量.
- 只有 _____, 没有 _____ 的量称为数量.

【诊断分析】 给出下列量:①面积;②速度;③位移;④力;⑤加速度;⑥路程;⑦密度;⑧功;⑨温度;⑩角度.
(1)这些量有什么区别?

(2)这些量中不是向量的有 _____ ()
A. 3个 B. 4个 C. 5个 D. 6个

◆ 知识点二 向量的表示法

1. 有向线段:具有方向的线段叫作有向线段(如图),有向线段包含三个要素:起点、方向、长度.

$A \longrightarrow B$

2. 向量的表示

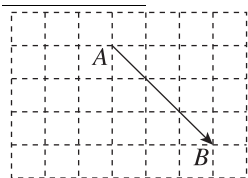
(1)向量的几何表示法:向量常用一条有向线段来表示,有向线段的长度表示向量的大小,箭头所指的方向表示向量的方向,以 A 为起点, B 为终点的向量记为 \overrightarrow{AB} . 向量 \overrightarrow{AB} 的大小称为向量的长度(或称为模),记作 $|\overrightarrow{AB}|$.

(2)字母表示法:用小写字母 a, b, c 来表示.

【诊断分析】 1. 判断正误.(正确的打“√”,错误的打“×”)

在同一平面内,把所有长度为1的向量的起点固定在同一点,则这些向量的终点形成的轨迹是半径为1的圆. ()

2. 在如图所示的方格纸上,每个小正方形的边长均为1,则 $|\overrightarrow{AB}| =$ _____



3. 向量的模可以为0吗? 可以为1吗? 可以为负数吗?

◆ 知识点三 向量的有关概念

相关概念	定义	注意
零向量	长度为0的向量称为零向量,记作 $\mathbf{0}$	方向是任意的
单位向量	长度等于 _____ 长度的向量	
平行向量 (共线向量)	方向相同或相反的非零向量叫作平行向量. 向量 a 与 b 平行,记作 _____ . 任意一组 _____ 都可以平移到同一条直线上,因此平行向量又称为 _____	零向量与任一向量平行
相等向量	长度 _____ 且 _____ 相同的向量叫作相等向量. 向量 a 与 b 相等,记作 $a = b$	在平面内,相等的向量有无数多个
相反向量	与向量 a 长度 _____, 方向 _____ 的向量,叫作 a 的相反向量,记作 $-a$	零向量的相反向量仍是零向量

【诊断分析】 1. 判断正误.(正确的打“√”,错误的打“×”)

(1)若向量 a 与 b 共线,向量 b 与 c 共线,则向量 a 与 c 共线. ()

(2)若向量 a 与 b 不共线,向量 b 与 c 不共线,则向量 a 与 c 不共线. ()

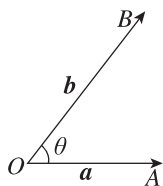
(3)若向量 \overrightarrow{AB} 与 \overrightarrow{CD} 是共线向量,则 A, B, C, D 四点一定共线. ()

(4)向量 a 与 b 不共线,则 a 与 b 都是非零向量. ()

2. 0 与 $\mathbf{0}$ 有什么区别和联系?

◆ 知识点四 向量的夹角

1. 定义:对于两个_____向量 a 和 b (如图所示),在平面内任取一点 O ,作 $\overrightarrow{OA} = a, \overrightarrow{OB} = b$,则 $\angle AOB = \theta (0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ)$ 叫作向量 a 与 b 的_____.



2. 向量的夹角 θ 的取值范围是_____. 当 $\theta =$ _____ 时, a 与 b 同向;当 $\theta =$ _____ 时, a 与 b 反向;当 $\theta =$ _____ 时,则称向量 a 与 b 垂直,记作_____.

课中探究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 向量的基本概念

例 1 (1)下列结论中,正确的是 ()

- A. 零向量只有大小没有方向
- B. $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BA}|$
- C. 对任意一个向量 $a, |a| > 0$ 总是成立的
- D. $|\overrightarrow{AB}|$ 与线段 BA 的长度不相等

(2)某船从 A 点出发向正西方向航行了 150 km 到达 B 点,然后改变方向向北偏西 30° 方向航行了 200 km 到达 C 点,最后又改变方向向正东方向航行了 150 km 到达 D 点.

- ①作出向量 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$;
- ②求 $|\overrightarrow{AD}|$.

变式 下列说法中正确的是 ()

- A. 数量可以比较大小,向量也可以比较大小
- B. 方向不同的向量不能比较大小,但共线向量可以比较大小
- C. 向量的模与方向有关
- D. 向量的模可以比较大小

[素养小结]

解决与向量概念有关问题的关键是突出向量的核心——方向和长度.如,单位向量的核心是方向没有限制,但长度都是一个单位长度;零向量的核心是方向没有限制,长度是 0;规定零向量与任意向量共线.只有紧紧抓住概念的核心才能顺利解决与向量概念有关的问题.

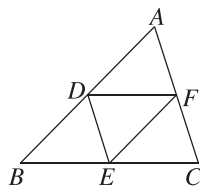
◆ 探究点二 相等向量与共线向量

例 2 下列说法中,正确的是 ()

- A. 已知 a, b, c 为非零向量,若 a 与 b 是共线向量, b 与 c 是平行向量,则 a 与 c 是方向相同的向量
- B. 任意两个相等的非零向量的起点与终点总是一个平行四边形的四个顶点
- C. 相等的非零向量必是共线向量
- D. 有相同起点的两个非零向量一定不是平行向量

例 3 如图, D, E, F 分别是 $\triangle ABC$ 的边 AB, BC, CA 的中点,在以 A, B, C, D, E, F 为起点和终点的向量中:

- (1)找出与向量 \overrightarrow{EF} 相等的向量;
- (2)找出与向量 \overrightarrow{DF} 共线的向量;
- (3)找出与向量 \overrightarrow{DE} 相反的向量.



变式 1 如图所示, O 是正三角形

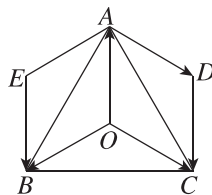
ABC 的中心,四边形 $A OCD$ 和四边形 $AOBE$ 均为平行四边形,则与向量 \overrightarrow{AD} 相等的向量有_____

(不包括 \overrightarrow{AD});与向量 \overrightarrow{OA} 相反的

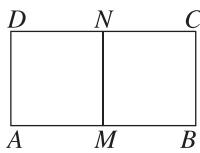
向量有_____;

与向量 \overrightarrow{OA} 的模相等的向量有_____

(不包括 \overrightarrow{OA}). (填图中所画出的向量)



变式 2 如图,在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 2AD$, M, N 分别为 AB 与 CD 的中点,则在以 A, B, C, D, M, N 为起点和终点的所有向量中,相等向量的对数为 ()



- A. 9 B. 11
C. 18 D. 24

[素养小结]

解决此类问题时,必须要把握好相等向量、平行向量、相反向量等概念的特征及相互关系.

◆ 探究点三 向量的夹角

例 4 在平行四边形 $ABCD$ 中, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}|$, 且向量 \overrightarrow{AB} 与 \overrightarrow{AD} 的夹角为 60° .

- (1) \overrightarrow{AC} 与 \overrightarrow{AB} 的夹角为多少?
(2) \overrightarrow{DB} 与 \overrightarrow{AB} 的夹角为多少?

变式 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}, \overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$, 向量 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的夹角 θ 为钝角, 则 $\triangle ABC$ 的形状是 ()

- A. 锐角三角形 B. 直角三角形
C. 钝角三角形 D. 不能确定

[素养小结]

寻找两个向量的夹角时, 必须把两个向量的起点平移到同一个点. 如在 $\triangle ABC$ 中, A, B, C 分别是三角形的内角, 则向量 \overrightarrow{AB} 与 \overrightarrow{AC} 的夹角为 A , 向量 \overrightarrow{AB} 与 \overrightarrow{BC} 的夹角为 $\pi - B$.

9.2 向量运算

9.2.1 向量的加减法

第 1 课时 向量的加法运算

【学习目标】

- 借助实例和平面向量的几何表示, 掌握平面向量加法运算及运算规则, 并理解其几何意义, 会用向量加法的三角形法则和平行四边形法则作出两个向量的和.
- 能够在数学问题情境中, 掌握向量加法的交换律与结合律, 并会用它们进行向量运算.

(续表)

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 向量加法的定义及运算法则

1. 向量加法的定义

求 _____ 的运算叫作向量的加法.

2. 向量加法的运算法则

	三角形法则	平行四边形法则
前提	已知非零向量 \mathbf{a}, \mathbf{b}	已知两个不共线的非零向量 \mathbf{a}, \mathbf{b}
作法	在平面内任取一点 O , 作 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b}$, 则 $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} =$ _____	作 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{OC} = \mathbf{b}$, 以 OA, OC 为邻边作 $\square OACB$, 连接 OB , 则 $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$

	三角形法则	平行四边形法则
结论	向量 \overrightarrow{OB} 叫作 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的和, 记作 $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, 即 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$	向量 \overrightarrow{OB} 就是 \mathbf{a} 与 \mathbf{b} 的和
图形		
特例	任一向量与其相反向量的和是零向量, 即 $\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = (-\mathbf{a}) + \mathbf{a} = \mathbf{0}$. 对于零向量和任一向量 \mathbf{a} , 我们规定 _____	
三角不等式	$ \mathbf{a} + \mathbf{b} \leq \mathbf{a} + \mathbf{b} $, 当且仅当 \mathbf{a}, \mathbf{b} 方向相同时等号成立	

【诊断分析】 1. 判断正误. (正确的打“√”,错误的打“×”)

- (1) 两个向量相加的结果可能是一个数量. ()
 (2) 两个向量相加实际上就是两个向量的模相加. ()
 (3) 任意两个向量的和向量不可能与这两个向量共线. ()
 2. 已知向量 a 表示“向东航行 1 km”, 向量 b 表示“向南航行 1 km”, 则 $a+b$ 表示什么?

◆ 知识点二 向量加法的运算律

1. 运算律

运算律	交换律	$a+b=$ _____
	结合律	$(a+b)+c=$ _____

2. 向量加法不等式: $||a|-|b|| \leq |a+b| \leq |a|+|b|$.

【诊断分析】 判断正误. (正确的打“√”,错误的打“×”)

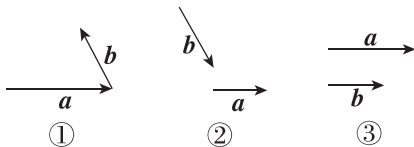
- (1) $0+a=a+0=a$. ()
 (2) $(a+b)+c=a+(c+b)$. ()
 (3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\mathbf{0}$. ()
 (4) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. ()

课中探究

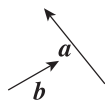
考点探究 素养小结

◆ 探究点一 向量加法的三角形法则与平行四边形法则

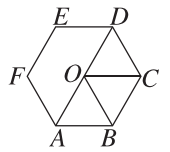
例 1 (1) 已知向量 a, b , 用向量加法的三角形法则作出图①②③中的向量 $a+b$. (不写作法, 画出图形即可)



(2) 已知向量 a, b (如图), 请用向量加法的平行四边形法则作出向量 $a+b$. (不写作法, 画出图形即可)



变式 如图所示, O 为正六边形 $ABCDEF$ 的中心, 化简下列各式:



- (1) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\underline{\hspace{2cm}}$;
 (2) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\underline{\hspace{2cm}}$;
 (3) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OD}=\underline{\hspace{2cm}}$;
 (4) $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{FE}=\underline{\hspace{2cm}}$;
 (5) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{FE}=\underline{\hspace{2cm}}$.

[素养小结]

- (1) 在使用向量加法的三角形法则时, 要注意“首尾相接”, 即若第一个向量的终点与第二个向量的起点重合, 则以第一个向量的起点为起点, 并以第二个向量的终点为终点的向量为两向量的和.
 (2) 应用向量加法的平行四边形法则的前提是“共起点”, 即两个向量是从同一点出发的不共线向量.

拓展 当 a, b 处于什么位置时, $|a+b|=|a|+|b|$.

◆ 探究点二 向量的加法运算及运算律

例 2 化简: (1) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}$;

(2) $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}$;

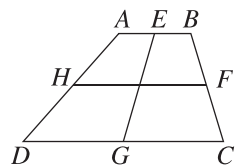
(3) $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BN})+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})$;

(4) $\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA})+\overrightarrow{DC}$.

变式 如图, E, F, G, H 分别是梯形 $ABCD$ 的边 AB, BC, CD, DA 的中点, 化简下列各式:

(1) $\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{CB}$;

(2) $\overrightarrow{EG}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{EB}$.



[素养小结]

解决向量的加法运算问题时应注意以下几点:

- (1) 可以利用向量的几何表示,画出图形进行化简或计算.
- (2) 要灵活应用向量加法的运算律.
- (3) 注意各向量的起点、终点及向量起点、终点字母的排列顺序,特别注意勿将 $\mathbf{0}$ 写成 0.

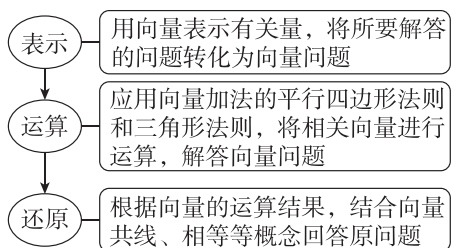
◆ 探究点三 向量加法的实际应用

例 3 一条河的宽为 800 m,一艘船从 A 处出发垂直到达河正对岸的 B 处,船在静水中速度的大小为 20 km/h,水流速度的大小为 12 km/h,求船到达 B 处所需时间.

变式 飞机从 A 地按北偏西 15° 的方向飞行 1400 km 到达 B 地,再从 B 地按南偏东 75° 的方向飞行 1400 km 到达 C 地,求该飞机飞行的路程和位移.

[素养小结]

应用向量解决实际问题的基本步骤



第 2 课时 向量的减法运算

【学习目标】

1. 借助实例和平面向量的几何表示,掌握平面向量减法运算及运算规则,并理解其几何意义.
2. 会作出两个向量的差.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

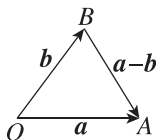
◆ 知识点一 向量减法的概念

若 $b+x=a$,则向量 x 叫作 a 与 b 的 ,记为 $a-b$.求两个向量差的运算,叫作向量的减法.

◆ 知识点二 向量减法的几何意义

当向量 a, b 起点相同时,从 b 的 指向 a 的 的向量就是 $a-b$.

如图,以 O 为起点,作向量 $\overrightarrow{OA}=a$,
 $\overrightarrow{OB}=b$,则 $\overrightarrow{BA}=a-b$.



◆ 知识点三 $|a-b|$ 与 $|a|, |b|$ 之间的关系

(1) 对于任意向量 a, b ,都有 $\leq |a-b| \leq$;

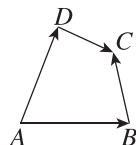
(2) 当 a, b 共线,且同向时,有 $|a-b| =$ 或 ;

(3) 当 a, b 共线,且反向时,有 $|a-b| =$.

【诊断分析】1. 判断正误.(正确的打“√”,错误的打“×”)

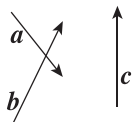
- (1) 两个向量的差仍是一个向量. ()
- (2) 向量 a 和向量 b 的差与向量 b 和向量 a 的差互为相反向量. ()

2. 如图所示,在四边形 $ABCD$ 中,设 $\overrightarrow{AB}=a, \overrightarrow{AD}=b, \overrightarrow{BC}=c$,则向量 \overrightarrow{DC} 可用 a, b, c 表示为 .

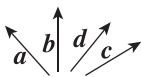


◆ 探究点一 向量的减法及其几何意义

例 1 如图,已知向量 a, b, c 不共线,求作向量 $a + b - c$.



变式 如图所示,已知向量 a, b, c, d ,求作向量 $a - b, c - d$.



[素养小结]

求作两个向量的差向量的两种思路

(1)可以转化为向量的加法来进行,如 $a - b$,可以先作 $a, -b$,然后作 $a + (-b)$ 即可.

(2)也可以直接用向量减法的几何意义,使两向量的起点重合,则差向量为连接两个向量的终点,指向被减向量的终点的向量.

◆ 探究点二 向量加减法的基本运算

例 2 化简:(1) $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{AD}$;
(2) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CA}$.

变式 化简:(1) $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NQ} - \overrightarrow{PQ} =$ _____ ;
(2) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} =$ _____ ;
(3) $\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OM} =$ _____ .

[素养小结]

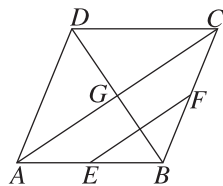
向量减法的三角形法则的内容:两向量相减,表示两向量起点的字母必须相同,这样两向量的差向量以减向量的终点为起点,以被减向量的终点为终点.此类问题要特别注意向量的方向以及运算式中向量之间的关系.

◆ 探究点三 向量加法与减法的综合应用

例 3 如图所示,在平行四边形 $ABCD$ 中, E, F 分别为边 AB 和 BC 的中点, G 为 AC 与 BD 的交点.

(1)若 $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}|$,则四边形 $ABCD$ 是什么特殊的平行四边形?说明理由.

(2)化简 $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{EB}$,并在图中作出表示该化简结果的向量.



变式 已知平面内的四边形 $ABCD$ 和点 O ,设 $\overrightarrow{OA} = a, \overrightarrow{OB} = b, \overrightarrow{OC} = c, \overrightarrow{OD} = d$,若 $a + c = b + d$,试判断四边形 $ABCD$ 的形状.

[素养小结]

向量加法与减法的三角形法则将向量加法与减法的几何意义得以体现,要明确和向量与差向量的起点与方向.

拓展 若 $\overrightarrow{AC} = a + b, \overrightarrow{DB} = a - b$ (a, b 均为非零向量).

- ① 当 a, b 满足什么条件时, $a + b$ 与 $a - b$ 垂直?
- ② 当 a, b 满足什么条件时, $|a + b| = |a - b|$?
- ③ 当 a, b 满足什么条件时, $a + b$ 平分 a 与 b 的夹角?
- ④ $a + b$ 与 $a - b$ 可能是相等向量吗?

9.2.2 向量的数乘

【学习目标】

1. 通过实例分析,掌握平面向量数乘运算及运算规则,理解其几何意义.
2. 理解两个平面向量共线的含义.
3. 了解平面向量的线性运算性质及其几何意义.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 向量的数乘

1. 定义:实数 λ 与向量 a 相乘的运算,叫作向量的数乘.

2. 表示及规定:实数 λ 与向量 a 的积是一个 _____,记作 λa ,它的长度和方向规定如下:

- (1) $|\lambda a| = |\lambda| |a|$;
- (2) 若 $a \neq 0$,则当 $\lambda > 0$ 时, λa 与 a 方向 _____; 当 $\lambda < 0$ 时, λa 与 a 方向 _____.

3. 向量数乘 λa 的几何意义

当 $\lambda > 0$ 时,把向量 a 沿着 a 的相同方向 _____; 当 $\lambda < 0$ 时,把向量 a 沿着 a 的 _____ 方向 _____.

◆ 知识点二 平面向量数乘的运算

1. 运算律:设 a, b 为向量, λ, μ 为实数,则有:

- ① $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$;
- ② $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$;
- ③ $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$.

特别地,有 $(-\lambda)a = \lambda(-a) = -(\lambda a), \lambda(a - b) = \lambda a - \lambda b$.

2. 向量的线性运算:向量的加法、减法和数乘统称为向量的线性运算.向量线性运算的结果仍是向量.

对于任意向量 a, b ,以及任意实数 λ, μ_1, μ_2 ,恒有 $\lambda(\mu_1 a \pm \mu_2 b) = \lambda\mu_1 a \pm \lambda\mu_2 b$.

【诊断分析】 1. 判断正误.(正确的打“√”,错误的打“×”)

- (1) λa 的方向与 a 的方向一致. ()
- (2) 若 $\lambda a = 0$,则 $a = 0$. ()
- (3) 对于任意实数 m 和向量 a, b ,若 $ma = mb$,则 $a = b$. ()

2. 化简: $\frac{1}{12}[2(2a + 8b) - 4(4a - 2b)] =$ _____.

◆ 知识点三 向量共线定理

向量共线定理:设 a 为 _____ 向量,如果有一个实数 λ ,使 $b = \lambda a$,那么 b 与 a 是共线向量;反之,如果 b 与 a ($a \neq 0$) 是共线向量,那么 _____ 实数 λ ,使 $b = \lambda a$.

规定:如果向量 a, b 共线且向量 b 的长度是向量 a 的长度的 λ 倍,即 $|b| = \lambda|a|$,那么当 b 与 a 同向时, $b = \lambda a$;当 b 与 a 反向时, $b = -\lambda a$.

【诊断分析】 1. 判断正误.(正确的打“√”,错误的打“×”)

- (1) 若向量 b 与 a 共线,则存在唯一的实数 λ ,使 $b = \lambda a$. ()
- (2) 若 $b = \lambda a$ ($a \neq 0, \lambda \in \mathbf{R}$),则 a 与 b 共线. ()

2. 向量共线定理中为什么规定 $a \neq 0$?

◆ 探究点一 向量数乘的概念

例 1 (1) 给出下列说法:

① 对于实数 m 和向量 a, b , 恒有 $m(a-b) = ma - mb$;② 对于实数 m, n 和向量 a , 恒有 $(m-n)a = ma - na$;③ 若 $ma = mb (m \in \mathbf{R})$, 则 $a = b$;④ 若 $ma = na (m, n \in \mathbf{R}, a \neq \mathbf{0})$, 则 $m = n$.

其中, 正确说法的个数是 ()

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

(2) 设 a 是非零向量, λ 是非零实数, 则下列结论正确的是 ()A. a 与 $-\lambda a$ 的方向相反B. $|\lambda a| \geq |a|$ C. a 与 $\lambda^2 a$ 的方向相同D. $|\lambda a| = |\lambda| |a|$

◆ 探究点二 向量线性运算

例 2 化简: (1) $6(3a-2b) + 9(-2a+b)$;(2) $\frac{1}{2} \left[(3a+2b) - \frac{2}{3}a - b \right] - \frac{7}{6} \left[\frac{1}{2}a + \frac{3}{7} \left(b + \frac{7}{6}a \right) \right]$;(3) $6(a-b+c) - 4(a-2b+c) - 2(-2a+c)$.变式 (1) 化简: $(5a-4b+c) - 2(3a-2b+c) =$ _____.(2) 已知向量 a, b, x, y 满足关系式 $3x-2y=a$, $-4x+3y=b$, 试用向量 a, b 表示向量 x, y .

[素养小结]

(1) 向量的数乘运算类似于代数多项式的运算, 实数运算中的去括号、移项、合并同类项、提取公因式等变形方法在数与向量的乘积中同样适用, 但是在这里的“同类项”“公因式”指向量, 实数应看作是向量的系数.

(2) 向量也可以通过列方程(或方程组)求解, 同时在运算过程中应注意观察, 恰当的运用运算律, 简化运算过程.

◆ 探究点三 向量共线定理及其应用

例 3 已知 e_1, e_2 是平面上两个不共线的向量, 且 $\overrightarrow{AB} = ke_1 - 4e_2, \overrightarrow{CD} = -e_1 + ke_2, \overrightarrow{CB} = e_1 + 2e_2$.(1) 若 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ 方向相反, 求 k 的值;(2) 若 A, C, D 三点共线, 求 k 的值.变式 (1) 已知向量 a, b 不共线, 且 $\overrightarrow{AB} = a + 4b, \overrightarrow{BC} = -a + 9b, \overrightarrow{CD} = 3a - b$, 则一定共线的三点是 ()A. A, B, D B. A, B, C C. B, C, D D. A, C, D (2) 设 a, b 是两个不共线的向量, 若向量 $ka+b$ 与 $4a-2b$ 的方向相反, 则实数 $k =$ _____.

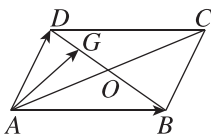
[素养小结]

利用向量共线求参数的方法

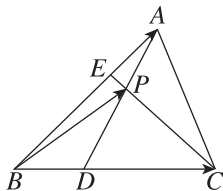
解决判断、证明向量共线问题的思路是根据向量共线定理寻求唯一的实数 λ , 使得 $b = \lambda a (a \neq \mathbf{0})$. 而已知向量共线求 λ , 常根据向量共线的条件转化为相应向量系数相等求解.

◆ 探究点四 用已知的向量表示未知的向量

例 4 如图,在 $\square ABCD$ 中, $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD}=\mathbf{b}$,点 O 是 AC 与 BD 的交点,点 G 是 DO 的中点,试用 \mathbf{a},\mathbf{b} 表示 \overrightarrow{AG} .



变式 如图,在 $\triangle ABC$ 中,点 D,E 分别在边 BC 和边 AB 上,且 $DC=2BD$, $BE=2AE$, AD 交 CE 于点 P ,设 $\overrightarrow{BC}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{BA}=\mathbf{b}$.试用 \mathbf{a},\mathbf{b} 表示 \overrightarrow{BP} .



[素养小结]

1. 用已知向量表示未知向量问题的求解思路:

(1)结合图形的特征,把待求向量放在三角形或平行四边形中;(2)结合向量的三角形法则或平行四边形法则及向量共线定理用已知向量表示未知向量;(3)当直接表示比较困难时,可以利用三角形法则或平行四边形法则建立关于所求向量和已知向量的等量关系,然后解方程(组)求得相关系数.

2. 设 a,b 均为实数,若 $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ 不共线,点 P 满足 $\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OA}+b\overrightarrow{OB}$, $a+b=1$,则 A,B,P 三点共线.

拓展 点 E,F 分别为四边形 $ABCD$ 的对角线 AC, BD 的中点,设 $\overrightarrow{BC}=\mathbf{a},\overrightarrow{DA}=\mathbf{b}$,试用 \mathbf{a},\mathbf{b} 表示 \overrightarrow{EF} .

9.2.3 向量的数量积

第1课时 向量数量积的定义、投影向量

【学习目标】

1. 通过物理中“功”等实例,理解平面向量数量积的概念及其物理意义,会计算平面向量的数量积.
2. 通过几何直观,了解平面向量投影的概念以及投影向量的意义,体会平面向量数量积与投影向量的关系.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 向量的数量积

1. 定义:已知两个非零向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} ,它们的夹角是 θ ,我们把数量_____叫作向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 的数量积,记作_____,即_____.我们规定:零向量与任一向量的数量积为_____.

2. 两个非零向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 的夹角公式:两个非零向量 \mathbf{a} 和 \mathbf{b} 的夹角 θ ,可以由 $\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$ 求得.特别注意向量夹角的取值范围是_____.

【诊断分析】 1. 向量的数量积的运算结果和向量的线性运算的结果有什么区别?

2. 两个非零向量的数量积是否可为正数、负数和零,其数量积的符号是由什么来决定的?

◆ 知识点二 数量积的性质

设 a, b 是非零向量, 它们的夹角是 θ , 则

(1) $a \perp b \Leftrightarrow$ _____.

(2) 当 a 与 b 同向时, $a \cdot b =$ _____; 当 a 与 b 反向时, $a \cdot b =$ _____.

特别地, $a \cdot a = a^2 =$ _____ 或 $|a| =$ _____, 此性质可用来求向量的模, 这两个等式实现了实数运算与向量运算的相互转化.

(3) 对任意两个向量 $a, b, |a \cdot b| \leq |a| |b|$, 当且仅当 _____ 时等号成立.

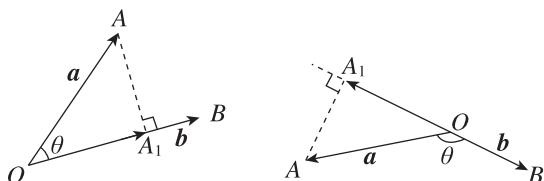
【诊断分析】 判断正误. (正确的打“√”, 错误的打“×”)

(1) 已知 $|a| = 2, |b| = 4$, 且 $a \parallel b$, 则 $a \cdot b = 8$. ()

(2) 设向量 a 与 b 的夹角为 θ , 则 $a \cdot b > 0$ 的充要条件是 $\cos \theta > 0$. ()

◆ 知识点三 投影向量

投影向量: 如图所示, 设 a, b 是两个非零向量, \overrightarrow{OA} 表示向量 a , \overrightarrow{OB} 表示向量 b , 过点 A 作 \overrightarrow{OB} 所在直线的垂线, 垂足为点 A_1 . 我们将上述由向量 a 得到向量 $\overrightarrow{OA_1}$ 的变换称为向量 a 向向量 b _____, 向量 $\overrightarrow{OA_1}$ 称为向量 a 在向量 b 上的 _____.



对于向量 a, b , 向量 a 在向量 b 上的投影向量为 _____.

向量 a 和 b 的数量积就是向量 a 在向量 b 上的 _____ 与向量 b 的 _____, 即 _____.

【诊断分析】 若 $|a| = 4, |e| = 1$, a 与 e 的夹角为 30° , 则 a 在 e 上的投影向量为 ()

- A. $2e$
- B. $\sqrt{3}e$
- C. $2\sqrt{3}e$
- D. $4e$

课中探究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 向量数量积的运算

例 1 已知 $|a| = 4, |b| = 5$.

- (1) 若 $a \parallel b$, 求 $a \cdot b$ 的值;
- (2) 若 $a \perp b$, 求 $a \cdot b$ 的值;
- (3) 若 a 与 b 的夹角为 30° , 求 $a \cdot b$ 的值.

变式 在等腰直角三角形 ABC 中, $AB = BC = 4$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} =$ _____, $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} =$ _____, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} =$ _____.

[素养小结]

求平面向量数量积的一般步骤: (1) 求 a 与 b 的夹角 $\theta, \theta \in [0, \pi]$; (2) 分别求 $|a|$ 和 $|b|$; (3) 代入公式 $a \cdot b = |a| |b| \cos \theta$, 求数量积要特别注意书写时 a 与 b 之间用实心圆点“ \cdot ”连接, 而不能用“ \times ”连接, 也不能省去.

◆ 探究点二 平面向量数量积的基本性质

例 2 给出以下结论: ① $0 \cdot a = 0$; ② 若非零向量 a, b 共线, 则 $a \cdot b = |a| |b|$; ③ $a^2 = |a|^2$; ④ 已知 a, b, c 是三个非零向量, 若 $a + b = 0$, 则 $|a \cdot c| = |b \cdot c|$; ⑤ $|a \cdot b| \leq a \cdot b$; ⑥ 若非零向量 a, b 满足 $a \cdot b > 0$, 则 a 与 b 的夹角为锐角. 其中正确结论的个数为 ()

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

变式 已知 a, b, c 是三个非零向量, 则下列说法中正确的个数为 ()

- ① 若 $a \cdot b = \pm |a| \cdot |b|$, 则 $a \parallel b$;
- ② 若 a, b 反向共线, 则 $a \cdot b = -|a| \cdot |b|$;
- ③ 若 $a \perp b$, 则 $|a + b| = |a - b|$;
- ④ 若 $|a| = |b|$, 则 $|a \cdot c| = |b \cdot c|$.

- A. 1
- B. 2
- C. 3
- D. 4

[素养小结]

当非零向量 a, b 满足 $a \cdot b > 0$, 且 a, b 不共线时, a 与 b 的夹角为锐角; 当非零向量 a, b 满足 $a \cdot b < 0$, 且 a, b 不共线时, a 与 b 的夹角为钝角.

◆ 探究点三 投影向量

例 3 已知 $|a|=3, |b|=1$, 向量 a 与向量 b 的夹角为 120° , 求:

- (1) 向量 a 在向量 b 上的投影向量;
 (2) 向量 b 在向量 a 上的投影向量.

变式 (1) 已知等边三角形 ABC 的边长为 2, 则向量 \overrightarrow{AB} 在向量 \overrightarrow{CA} 上的投影向量为 ()

- A. $-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ B. $\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$
 C. $2\overrightarrow{AC}$ D. $2\overrightarrow{CA}$

(2) 已知 $|b|=3$, 若 a 在 b 上的投影向量为 $\frac{1}{2}b$, 则 $a \cdot b =$ ()

- A. 3 B. $\frac{9}{2}$
 C. 2 D. $\frac{1}{2}$

(3) 若 $|a|=2, |b|=4$, 向量 a 与向量 b 的夹角为 120° , 与 b 方向相同的单位向量为 e , 则向量 a 在向量 b 上的投影向量为_____.

[素养小结]

对于非零向量 a, b , 向量 a 在向量 b 上的投影向量为 $|a| \cos \theta \frac{b}{|b|}$.

第 2 课时 向量数量积的运算律

【学习目标】

理解平面向量数量积的运算律, 会用数量积判定两个平面向量的垂直关系.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 向量数量积的运算律

向量数量积满足的运算律

- (1) $a \cdot b = b \cdot a$;
 (2) $(\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b) = \lambda(a \cdot b) = \lambda a \cdot b$ (λ 为实数);
 (3) $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

◆ 知识点二 平面向量数量积运算的常用公式

多项式乘法	向量数量积
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	$(a+b)^2 =$ _____
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$	$(a-b)^2 =$ _____
$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$	$(a+b)(a-b) =$ _____
$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$	$(a+b+c)^2 =$ _____

课 中 探 究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 向量数量积的运算律

例 1 (多选题) 设 a, b, c 是不共线的非零向量, 则下列结论正确的是 ()

- A. $a \cdot c - b \cdot c = (a-b) \cdot c$
 B. $(b \cdot c)a - (c \cdot a)b$ 不与 c 垂直
 C. $|a| - |b| < |a-b|$
 D. $(3a+2b) \cdot (3a-2b) = 9|a|^2 - 4|b|^2$

变式 (多选题) 将平面向量的数量积运算与实数的乘法运算相类比, 得到下列结论, 其中正确的是 ()

- A. $a \cdot b = b \cdot a$
 B. $(a \cdot b)c = a(b \cdot c)$
 C. $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$
 D. 由 $a \cdot b = a \cdot c (a \neq 0)$, 可得 $b=c$

◆ 探究点二 数量积运算律的应用

例 2 (1) 已知 $|a|=4, |b|=5$, 且向量 a 与 b 的夹角为 60° , 求 $(2a+3b) \cdot (3a-2b)$;

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, M 是 BC 的中点, $AM=3, BC=10$, 求 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 的值.

变式 (1) 已知向量 a, b, c 满足 $a+b=-c, |a|=3, |b|=|c|=2$, 则 $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a =$ ()

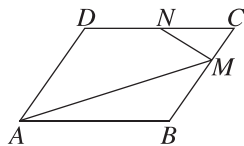
A. $\frac{17}{2}$

B. $\frac{15}{2}$

C. $-\frac{17}{2}$

D. $-\frac{15}{2}$

(2) [2024 · 大连育明中学高一期中] 如图, 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, $AB=4, AD=3$, 点 M, N 满足 $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{DN}=\overrightarrow{NC}$, 求 $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{NM}$ 的值.



[素养小结]

(1) 求两个向量的数量积, 应首先确定两个向量的模及夹角, 其中准确求出两个向量的夹角是求数量积的关键.

(2) 根据数量积的运算律, 向量的加、减与数量积的混合运算类似于多项式的乘法运算.

◆ 探究点三 向量模、夹角的计算问题

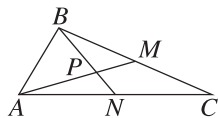
例 3 已知向量 a, b 满足 $|a|=2, |b|=1$, 且 a 与 b 的夹角为 120° .

(1) 求 $|2a-b|$;

(2) 求 a 与 $a+b$ 的夹角.

变式 (1) [2024 · 合肥一中高一期中] 非零向量 a, b 满足 $|a+b|=|a-2b|$, 若 $|a|=|b|$, 则 a, b 的夹角为 _____.

(2) 如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB=2, AC=5, \angle BAC=60^\circ$, BC, AC 边上的中线 AM, BN 相交于点 P , 求 $|\overrightarrow{AP}|$.



[素养小结]

求平面向量的模和夹角时要注意数量积运算律的正确运用, 在解决与图形有关的模与夹角问题时要注意选择合适的向量表示及公式的正确计算.

◆ 探究点四 两个非零向量的垂直问题

例 4 已知非零向量 m, n 满足 $4|m|=3|n|$, m 与 n 的夹角的余弦值为 $\frac{1}{3}$, 若 $n \perp (tm+n)$, 则实数 t 的值为 ()

A. 4

B. -4

C. $\frac{9}{4}$

D. $-\frac{9}{4}$

变式 [2024·北京房山区高一期中] 若向量 a, b 满足 $|a| = \sqrt{3}$, $|b| = 2$, 且 $(a - b) \perp a$, 则向量 a 与 b 的夹角为 ()

- A. $\frac{\pi}{3}$
C. $\frac{2\pi}{3}$

- B. $\frac{\pi}{6}$
D. $\frac{5\pi}{6}$

[素养小结]

解决与两个非零向量的垂直有关的问题时要利用 $a \perp b \Leftrightarrow a \cdot b = 0$.

拓展 已知 a 和 b 是平面内的两个单位向量, 且 a 与 b 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$, 若向量 c 满足 $(a - c) \cdot (b - c) = 0$, 则 $|c|$ 的最大值是 _____.

9.3 向量基本定理及坐标表示

9.3.1 平面向量基本定理

【学习目标】

了解平面向量基本定理及其意义, 会用平面向量基本定理解决简单数学问题.

课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 平面向量基本定理

1. 平面向量基本定理: 如果 e_1, e_2 是同一平面内两个 _____ 的向量, 那么对于这一平面内的任一向量 a , 有且只有一对实数 λ_1, λ_2 , 使 $a =$ _____.

2. 基底: 我们把两个 _____ 的向量 e_1, e_2 叫作这个平面的一组基底.

3. 正交分解: 平面内任一向量 a 可以用一组基底 e_1, e_2 表示成 $a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ 的形式, 我们称 _____ 为向量 a 的分解, 当 e_1, e_2 所在直线互相垂直时, 这种分解也称为向量 a 的 _____.

【诊断分析】 1. 判断正误. (正确的打“√”, 错误的打“×”)

- (1) 一个平面只有一组基底. ()
- (2) 只有不共线的两个向量才可以作为一组基底. ()
- (3) 平面的基底一旦确定, 该平面内的向量关于基底的分解也是唯一确定的. ()
- (4) 若 e_1, e_2 是同一平面内两个不共线的向量, 则 $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ (λ_1, λ_2 为实数) 可以表示该平面内所有向量. ()
2. 平面内任何一个向量 a 都可以表示成 $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$ (e_1, e_2 为平面的一组确定的基底) 的形式, 这种表示形式是唯一的吗?

◆ 知识点二 平面向量基本定理的应用

1. 平面向量基本定理唯一性的应用:

设 a, b 是同一平面内的两个不共线向量, 若 $x_1 a + y_1 b = x_2 a + y_2 b$, 则 $\begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$

2. 重要结论: 设 e_1, e_2 是平面的一组基底, 且 $a = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2$.

- ① 当 $\lambda_2 = 0$ 时, a 与 e_1 共线;
② 当 $\lambda_1 = 0$ 时, a 与 e_2 共线;
③ 当 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ 时, $a = 0$.

课 中 探 究

考点探究 素养小结

◆ 探究点一 对基底概念的理解

例 1 (1) 设 e_1, e_2 是平面的一组基底, 则下列四组向量中不能作为一组基底的是 ()

- A. $e_1 + e_2, e_1 - e_2$
B. $3e_1 - 2e_2, 4e_2 - 6e_1$
C. $e_1 + 2e_2, e_2 + 2e_1$
D. $e_2, e_2 + e_1$

(2) (多选题) 下列说法中正确的是 ()

- A. 一个平面内只有一对不共线向量可构成该平面内的基底
B. 一个平面内有无数对不共线向量可构成表示该平面内的基底
C. 零向量不可作为基底中的向量
D. 一对不共线的单位向量可构成该平面内的一组基底

变式 (1) 设 O 是平行四边形 $ABCD$ 两条对角线的交点, 给出下列四组向量:

- ① $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}$; ② $\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{BC}$; ③ $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{DC}$; ④ $\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB}$.

其中能作为平行四边形所在平面的一组基底的是 ()

- A. ①② B. ①③
C. ①④ D. ③④

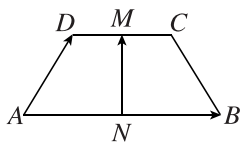
(2) 设 a, b 不共线, $c = 2a - b, d = 3a - 2b$, 试判断 c, d 能否作为一组基底.

[素养小结]

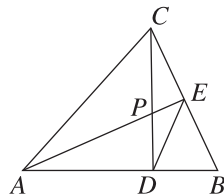
判断两个向量是否能作为一组基底, 主要看两向量是否非零且不共线. 此外, 一个平面的基底一旦确定, 那么该平面内任意一个向量都可以由这组基底唯一线性表示出来.

◆ 探究点二 用基底表示向量

例 2 如图所示, 四边形 $ABCD$ 是一个梯形, $AB \parallel CD$, 且 $AB = 2CD$, M, N 分别是 DC 和 AB 的中点. 已知 $\overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{AD} = b$, 用 a, b 表示 \overrightarrow{NM} .



变式 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, E 是边 BC 的中点, 点 D 在边 AB 上, 且满足 $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$, AE 与 CD 交于点 P . 试用 $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$ 表示 \overrightarrow{CD} 和 \overrightarrow{CP} .



[素养小结]

解决用已知向量表示其他向量的问题的关键是正确利用向量的加法、减法及数乘的几何意义.

(1) 若题目中已给出了基底, 求解此类问题时, 常利用向量加法的三角形法则或平行四边形法则, 结合数乘运算找到所求向量与基底的关系.

(2) 若题目中没有给出基底, 常结合已知条件先寻找一组从同一点出发的两个不共线向量作为基底, 然后用上述方法求解.

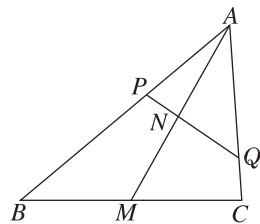
拓展 已知点 G 为 $\triangle ABC$ 的重心, 过点 G 作一条直线与边 AB, AC 分别交于 M, N , 若 $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$,

$\overrightarrow{AN} = y\overrightarrow{AC}, x, y \in (0, 1)$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} =$ ()

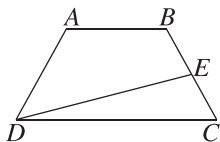
- A. 1 B. 2
C. 3 D. 4

◆ 探究点三 平面向量基本定理的应用

例 3 如图所示, 在 $\triangle ABC$ 中, P, Q 分别是边 AB, AC 上的点, 中线 AM 与 PQ 交于点 N , 若 $AB : AP = 5 : 2, AC : AQ = 4 : 3$, 求 $AM : AN$ 的值.



变式 如图, A, B, C, D 为平面内的四个点, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, E 为线段 BC 的中点, 若 $\overrightarrow{DE} = \lambda \overrightarrow{DA} + \mu \overrightarrow{DC}$, 求 $\lambda + \mu$ 的值.



[素养小结]

利用平面向量的线性运算以及平面向量基本定理处理平面几何的有关问题时, 要充分利用共线、垂直的充要条件.

拓展 用向量法证明三角形的三条高交于一点.

9.3.2 向量坐标表示与运算

第 1 课时 向量的坐标表示与向量线性运算的坐标表示

【学习目标】

1. 借助平面直角坐标系, 理解平面向量坐标的概念, 掌握平面向量的正交分解及坐标表示.
2. 掌握平面向量的坐标运算, 会用坐标表示平面向量的加、减运算.

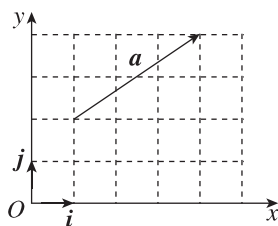
课 前 预 习

知识导学 素养初识

◆ 知识点一 向量的坐标

1. 平面向量的坐标表示

如图, 在平面直角坐标系中, 分别取与 x 轴, y 轴正方向相同的两个单位向量 i, j 作为基底, 对于平面内的向量 a , 由平面向量基本定理可知, 有且只有一对有序实数 (x, y) , 使得 $a = xi + yj$. 我们把有序实数对 称为向量 a 的(直角)坐标, 记作 .



2. 起点为坐标原点的向量坐标与其终点坐标的关系: 若 O 是坐标原点, 设 $\overrightarrow{OA} = xi + yj$, 则向量 \overrightarrow{OA} 的坐标 (x, y) 就是终点 A 的坐标; 反过来, 点 A 的坐标 (x, y) 就是向量 \overrightarrow{OA} 的坐标.

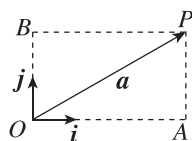
3. 特殊向量的坐标: $i = (1, 0), j = (0, 1), 0 = (0, 0)$.

【诊断分析】 1. 判断正误.(正确的打“√”, 错误的打“×”)

(1) 已知向量 $i = (1, 0), j = (0, 1), m = 4i - j$, 则 m 的坐标是 $(4, -1)$. ()

(2) 在平面直角坐标系中, 任意向量 m 的坐标都是唯一的. ()

2. 如图, 向量 i, j 是两个互相垂直的单位向量, 向量 a 与 i 的夹角是 30° , 且 $|a| = 4$, 以 i, j 为基底, 向量 a 可以表示为 .



◆ 知识点二 向量线性运算的坐标表示

已知向量 $a = (x_1, y_1), b = (x_2, y_2)$ 和实数 λ , 则有以下表:

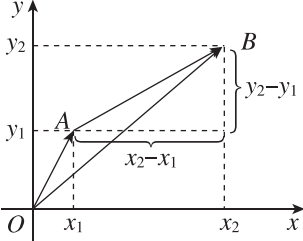
	符号表示	文字描述
加法	$a + b = \underline{\hspace{2cm}}$	两个向量和的坐标分别等于这两个向量相应坐标的 <u> </u>
减法	$a - b = \underline{\hspace{2cm}}$	两个向量差的坐标分别等于这两个向量相应坐标的 <u> </u>
数乘	$\lambda a = \underline{\hspace{2cm}}$	实数与向量的积的坐标等于用这个实数乘原来向量的相应坐标

【诊断分析】 已知向量 $\mathbf{a} = (1, -2)$, $\mathbf{b} = (-1, -3)$, $\mathbf{c} = (3, 4)$, 且 $\mathbf{c} = \lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b}$, 则 λ_1, λ_2 的值分别为 ()

- A. $-2, 1$ B. $1, -2$
C. $2, -1$ D. $-1, 2$

◆ 知识点三 平面向量的坐标表示

如图, 若 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $\overrightarrow{AB} =$ _____ . 这就是说, 一个向量的坐标等于该向量的坐标 _____ 的坐标 _____ 的坐标.



【诊断分析】 已知平面向量 $\overrightarrow{AB} = (1, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 4)$, 则向量 $\overrightarrow{CB} =$ ()

- A. $(-4, -6)$ B. $(4, 6)$
C. $(-2, -2)$ D. $(2, 2)$

课中探究

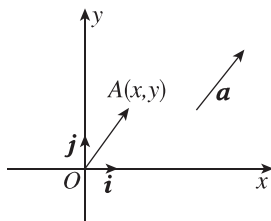
考点探究 素养小结

◆ 探究点一 平面向量的坐标表示

例 1 (1) 已知向量 \mathbf{a} 的终点在射线 $y = x (x \geq 0)$ 上, 且起点为坐标原点 O , 若 $|\mathbf{a}| = \sqrt{2}$, 则向量 \mathbf{a} 的坐标为 ()

- A. $(1, 1)$ B. $(-1, -1)$
C. $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ D. $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

(2) 如图所示, 在平面直角坐标系中, \mathbf{i}, \mathbf{j} 分别为与 x 轴、 y 轴正方向相同的单位向量, $\overrightarrow{OA}, \mathbf{a}$ 是平面内的向量, 且点 A 的坐标为 (x, y) , 则下列说法正确的是 _____ . (填序号)



- ① 向量 \mathbf{a} 可以表示为 $\mathbf{a} = m\mathbf{i} + n\mathbf{j} (m \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{R})$;
② 只有当 \mathbf{a} 的起点在原点时, $\mathbf{a} = (x, y)$;
③ 若 $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$, 则终点 A 的坐标就是向量 \mathbf{a} 的坐标.

变式 已知 O 是坐标原点, 点 A 在第一象限, 直线 OA 与 x 轴的夹角为 60° , $|\overrightarrow{OA}| = 4\sqrt{3}$.

- (1) 求向量 \overrightarrow{OA} 的坐标;
(2) 若 $B(\sqrt{3}, -1)$, 求 \overrightarrow{BA} 的坐标.

[素养小结]

在表示点、向量的坐标时, 可利用向量、点的坐标定义求坐标, 也可利用向量相等、加减法运算等求坐标.

◆ 探究点二 向量的坐标运算

例 2 已知 $\mathbf{a} = (-1, 2)$, $\mathbf{b} = (2, 1)$, 求:

- (1) $2\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$; (2) $\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$; (3) $\frac{1}{2}\mathbf{a} - \frac{1}{3}\mathbf{b}$.

变式 (1) 若向量 $\mathbf{a} = (1, 1)$, $\mathbf{b} = (-1, 1)$, $\mathbf{c} = (2, -1)$, 则 $\mathbf{c} =$ ()

- A. $-\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{3}{2}\mathbf{b}$ B. $\frac{1}{2}\mathbf{a} - \frac{3}{2}\mathbf{b}$
C. $-\frac{3}{2}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b}$ D. $\frac{3}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$

(2) 已知三点 $A(2, -1)$, $B(3, 4)$, $C(-2, 0)$, 则 $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CA} =$ _____, $\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB} =$ _____.

[素养小结]

向量的坐标运算主要是利用加、减运算法则及数乘运算法则进行, 解题时要注意方程思想的运用及正确使用运算法则.

拓展 已知 $O(0, 0)$, $A(1, 2)$, $B(3, 3)$, 且 $\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. 试问:

- (1) t 为何值时, 点 P 在 x 轴上? y 轴上? 第一象限?
(2) 四边形 $ABPO$ 能否为平行四边形? 若能, 求出相应的 t 值; 若不能, 请说明理由.